Argumentos lógicos (continuación)

E1 ¿Que se puede concluir lógicamente?

Algunos reptiles son iguanas y ninguna iguana *vuela*

$\Longrightarrow$

Ningún insecto es un ave y *Ningún ave es un reptil*

$\Longrightarrow$

Algunos europeos son franceses y *algunos franceses son ricos*

$\Longrightarrow$

Algunos reptiles son iguanas y ninguna iguana *vuela*

$\Rightarrow$?

Algunos reptiles son iguanas y ninguna iguana *vuela*

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ Algunos reptiles no *vuelan*

Algunos reptiles son iguanas y ninguna iguana *vuela*

$\Longrightarrow$ Algunos reptiles no *vuelan*

Es un argumento lógico.

Ningún insecto es un ave y *Ningún ave es un reptil*

$\Rightarrow$ *?*

Ningún insecto es un ave y *Ningún ave es un reptil*

?

$\Longrightarrow$ *Ningún insecto es un reptil*

Ningún insecto es un ave y *Ningún ave es un reptil*

$\not\Rightarrow$ *Ningún insecto es un reptil*

Es una falacia. Para ver que argumento es inválido, basta cambiar *insecto* por *cocodrilo*.

Algunos europeos son franceses y *algunos franceses son ricos*

$\Rightarrow$ *?*

Algunos europeos son franceses y *algunos franceses son ricos*

?

$\Rightarrow$ *algunos europeos son ricos*

Algunos europeos son franceses y *algunos franceses son ricos*

$\not\Longrightarrow$ *algunos europeos son ricos*

Es una falacia. Para ver que argumento es inválido, basta cambiar *europeos* por *niños* y *ricos* por *viejos*

¿Argumento lógico o falacia?

Lo importante de los argumentos lógicos no es lo que dicen en particular, sino *su estructura*, la manera en que esta conectadas las distintas partes.

Su validez o invalidez se puede aclarar si los vemos de manera abstracta, sin referencia a cosas que ya conocemos.

¿Este argumento es válido?

Todos los cazadores tienen dientes

algunos gatos son cazadores

Por lo tanto algunos gatos tienen dientes

¿Este argumento es válido?

Todos los cazadores tienen dientes

algunos gatos son cazadores

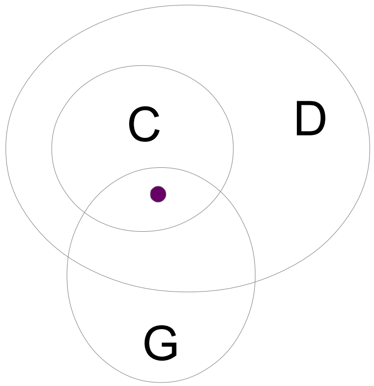
Por lo tanto algunos gatos tienen dientes

Puede escribirse como

Todos los C son D

y algunos G son C

Por lo tanto algunos G son D



El argumento es válido

¿Y este argumento es válido?

Platón era un gran filósofo

Todos los griegos eran grandes filósofos

Por lo tanto Platón era griego

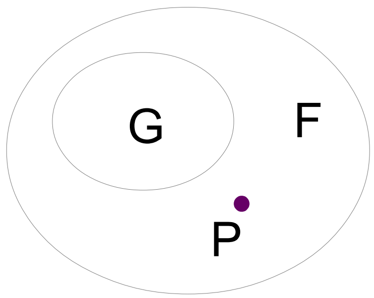
¿Y este argumento es válido?

Platón era un gran filósofo

Todos los griegos eran grandes filósofos

Por lo tanto Platón era griego

Puede escribirse como



P es F

Todos los G son F

Por lo tanto P es G

La conclusión es cierta, pero el argumento no es valido!

Demostraciones

Una **demostración** es un argumento lógico en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

Una **demostración** es un argumento lógico en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

En matemáticas todo se demuestra, aprender a hacer demostraciones toma tiempo y dedicación. Vamos a empezar haciendo algunas demostraciones sencillas.

Una **demostración** es un argumento lógico en el que cada paso esta plenamente justificado y es una consecuencia lógica inmediata de los anteriores.

En matemáticas todo se demuestra, aprender a hacer demostraciones toma tiempo y dedicación. Vamos a empezar haciendo algunas demostraciones sencillas.

Hay métodos de demostración directos y métodos indirectos, que a veces se combinan.

Demostraciones directas

Como $(p \to r) \wedge (r \to q) \Rightarrow (p \to q)$ entonces podemos demostrar $p \to q$ mostrando que $p \to r$ y que $r \to q$ donde r es cualquier otra proposición.

Demostraciones directas

Como $(p \to r) \wedge (r \to q) \Rightarrow (p \to q)$ entonces podemos demostrar $p \to q$ mostrando que $p \to r$ y que $r \to q$ donde r es cualquier otra proposición.

Mas generalmente, podemos demostrar que si pasa A entonces pasa Z buscando una serie de proposiciones, C, D, E, ... tales que podamos demostrar que si pasa A entonces pasa B, si pasa B entonces pasa C, si pasa C entonces pasa D.... hasta terminar en Z.

Demostrar que el cuadrado de un número par es par

Demostrar que el cuadrado de un número par es par

Hipótesis: n es un número par

Por demostrar: n^2 es par

Demostrar que el cuadrado de un número par es par

Hipótesis: n es un número par

Por demostrar: n^2 es par

Demostración (directa):

Por la hipótesis n es par

Demostrar que el cuadrado de un número par es par

Hipótesis: n es un número par

Por demostrar: n^2 es par

Demostración (directa):

Por la hipótesis n es par

Entonces $n=2m$ para algún número m

Demostrar que el cuadrado de un número par es par

Hipótesis: n es un número par

Por demostrar: n^2 es par

Demostración (directa):

Por la hipótesis n es par

Entonces $n=2m$ para algún número m

Entonces $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$

Demostrar que el cuadrado de un número par es par

Hipótesis: n es un número par

Por demostrar: n^2 es par

Demostración (directa):

Por la hipótesis n es par

Entonces $n=2m$ para algún número m

Entonces $n^2 = (2m)^2 = 4m^2$

Por lo tanto $n^2 = 2(2m^2)$ lo que dice que n^2 es par $\square$

Demostrar que si m y n son números enteros divisibles entre 3, entonces m+n es divisible entre 3

Demostrar que si m y n son números enteros divisibles entre 3, entonces m+n es divisible entre 3

Hipótesis: ?

Por demostrar: ?

Demostrar que si m y n son números enteros divisibles entre 3, entonces m+n es divisible entre 3

Hipótesis: m, n son números enteros divisibles entre 3

Por demostrar: m+n es divisible entre 3

Demostración (directa): ?

Demostrar que si m y n son números enteros divisibles entre 3, entonces m+n es divisible entre 3

Hipótesis: m, n son números enteros divisibles entre 3

Por demostrar: m+n es divisible entre 3

Demostración (directa):

Si m es divisible entre 3 entonces m = 3x para algún entero x

Y si n es divisible entre 3 entonces m = 3y para algún entero y.

Demostrar que si m y n son números enteros divisibles entre 3, entonces m+n es divisible entre 3

Hipótesis: m, n son números enteros divisibles entre 3

Por demostrar: m+n es divisible entre 3

Demostración (directa):

Si m es divisible entre 3 entonces m = 3x para algún entero x

Y si n es divisible entre 3 entonces m = 3y para algún entero y.

Entonces m+n = 3x+3y = 3(x+y) para el entero x+y

Demostrar que si m y n son números enteros divisibles entre 3, entonces m+n es divisible entre 3

Hipótesis: m, n son números enteros divisibles entre 3

Por demostrar: m+n es divisible entre 3

Demostración (directa):

Si m es divisible entre 3 entonces $m = 3x$ para algún entero x

Y si n es divisible entre 3 entonces $m = 3y$ para algún entero y.

Entonces $m+n = 3x+3y = 3(x+y)$ para el entero $x+y$

Entonces m+n es divisible entre 3. □

Demostraciones contrapositivas

Como $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$ entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ demostrando la *contrapositiva* $\neg q \rightarrow \neg p$

Demostraciones contrapositivas

Como $p \rightarrow q$ es equivalente a $\neg q \rightarrow \neg p$ entonces podemos demostrar $p \rightarrow q$ demostrando la *contrapositiva* $\neg q \rightarrow \neg p$

Para demostrar que si pasa A entonces tiene que pasar B podemos **suponer** que B no pasa y mostrar que entonces tampoco pasa A.

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión no es verdad, es decir que n es par

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión no es verdad, es decir que n es par

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión no es verdad, es decir que n es par

Entonces $n=2m$ para algún entero m

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión no es verdad, es decir que n es par

Entonces $n=2m$ para algún entero m

Entonces $n^2 =(2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$

Demostrar que si el cuadrado de un número entero es impar, entonces el número es impar.

Hipótesis: n es un numero entero y n^2 es impar

Por demostrar: n es impar

Demostración (contrapositiva):

Supongamos que la conclusión no es verdad, es decir que n es par

Entonces $n=2m$ para algún entero m

Entonces $n^2 =(2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$

esto dice que n^2 es par lo que niega la hipótesis. $\square$

Demostraciones por contradicción:

Si r es cualquier proposición *falsa*, entonces $p \rightarrow q$ es equivalente a $p \wedge \neg q \rightarrow r$.

Así que podemos demostrar $p \rightarrow q$ demostrando $p \wedge \neg q \rightarrow r$ donde r es *cualquier* proposición falsa.

Demostrar que no existen 2 números naturales cuyo cociente sea $\sqrt{2}$.

Demostrar que no existen 2 números naturales cuyo cociente sea $\sqrt{2}$.

La afirmación es equivalente a:

Si n y m son números naturales entonces $^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Demostrar: si n y m son números naturales entonces ${}^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Hipótesis: ?

Por demostrar: *?*

Demostrar: si n y m son números naturales entonces $^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Hipótesis: n y m son números naturales

Por demostrar: $^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Demostrar: si n y m son números naturales entonces ${}^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que hay números naturales m y n tales que ${}^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Demostrar: si n y m son números naturales entonces $^m/_n \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que hay números naturales m y n tales que $^m/_n = \sqrt{2}$

Elijamos a m y n lo mas chicos posibles.

Demostrar: si n y m son números naturales entonces $^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que hay números naturales m y n tales que $^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Elijamos a m y n lo mas chicos posibles.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Demostrar: si n y m son números naturales entonces ${}^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que hay números naturales m y n tales que ${}^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Elijamos a m y n lo mas chicos posibles.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

m=2m' para algún número natural m´

Demostrar: si n y m son números naturales entonces ${}^{m}/_{n} \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que hay números naturales m y n tales que ${}^{m}/_{n} = \sqrt{2}$

Elijamos a m y n lo mas chicos posibles.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

$m=2m'$ para algún número natural m'

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que n es par.

Demostrar: si n y m son números naturales entonces $m/n \neq \sqrt{2}$

Demostración (por contradicción)

Supongamos que hay números naturales m y n tales que $m/n = \sqrt{2}$

Elijamos a m y n lo mas chicos posibles.

Si $m/n = \sqrt{2}$ entonces $m^2/n^2 = 2$ así que $m^2 = 2n^2$

Como $m^2 = 2n^2$ entonces m^2 es par, así que m es par

$m=2m'$ para algún número natural m'

Así que $(2m')^2 = 2n^2$ por lo tanto $4m'^2 = 2n^2$ o sea $2m'^2 = n^2$

por lo tanto n^2 es par, así que n es par.

Por lo tanto m y n son ambos pares y podemos dividir a ambos entre 2 para hacerlos mas chicos sin cambiar el cociente

lo que contradice la suposición □

E5 *Demostrar que si m es divisible entre 3 y n no lo es entonces m+n no es divisible entre 3*

Demostrar que si m es divisible entre 3 y n no lo es entonces $m+n$ no es divisible entre 3

Hipótesis:

Por demostrar:

Demostración (por contradicción):